ITEA (1998), Vol. 94A N.° 3, 271-278

TEORÍA DE JUEGOS Y OPTIMIZACIÓN DE LOS PROGRAMAS DE MEJORA: FÁBULA DEL MEJORADOR EGOÍSTA Y DEL MEJORADOR ALTRUISTA

G. Yagüe
L.A. García-Cortés
C. Moreno
J. Altarriba

Unidad de Genética Cuantitativa y
Mejora Animal
Facultad de Veterinaria
Universidad de Zaragoza
50013 Zaragoza

España

RESUMEN

Se analiza el comportamiento de varias empresas de genética que, diseñando simultáneamente sus pruebas de descendencia, tratan de competir en un mismo mercado. Este trabajo muestra que el equilibrio comercial, es decir, el tamaño de familia que maximiza los resultados económicos para cada empresa, no coincide con el tamaño de familia que maximiza el progreso genético. El equilibrio comercial, en general, lleva a tamaños de familia menores. Se muestra también cómo las empresas inocentes, que no hacen uso de la teoría de juegos, verán sus cuotas de mercado arrebatadas por empresas que, desoyendo los consejos de la genética cuantitativa, tratan de maximizar sus resultados particulares a costa del progreso genético común.

Palabras clave: Prueba de descendencia, Competencia empresarial, Teoría de juegos.

SUMMARY
OPTIMUM FAMILI SIZE IN PROGENY TESTING AND THE THEROY OF GAMES

In this paper, the family size in a progeny test under limited testing facilities was determined considering a scheme where several commercial companies were competing. Companies that determined the family size in order to maximize the expected proportion of sires which will be selected from its stock were considered as competitive. On the other hand, companies that determined the family size in order to maximize the expected genetic progress were considered as altruist. Under the theory of games framework, it is shown that competitive companies obtain better commercial results than altruist companies. When competing against competitive companies, altruist companies obtained worse commercial results than they expect. When all companies were competitive, they obtained the same commercial results as if all of them were altruist, but the total genetic progress decreased. A numerical procedure is described to calculate the optimum family size to optimize the commercial results.

The result of this algorithm showed that this commercial equilibrium only depends on the heritability and the ratio between the total testing facilities of the population and the number of sires required for the market. This commercial equilibrium did not depend on the number of companies nor the size of each company.

Key words: Progeny test, Business competition, Theory of games.

Introducción

En este trabajo se estudia una prueba de progenie con los recursos de testaje limitados. Habitualmente en este tipo de problemas, el tamaño de familia se determina atendiendo al criterio de maximizar el progreso genético (HILL, 1971).

Cuando varias empresas compiten por el mismo mercado, su interés se centra en conseguir animales mejores que los de la competencia. Estas empresas pueden pensar que optimizar unilateralmente el progreso genético las hará más competitivas, sin embargo, disponen de una herramienta más formal para analizar el problema: La teoría de juegos (VON NEUMANN y MORGESTERN, 1944). Una revisión interesante sobre el tema puede encontrarse en RASMUSEN (1994).

Las reglas del juego

Presentaremos esta sección directamente sobre un ejemplo. Dos empresas, la primera con 1000 plazas y la segunda con 500 plazas (T=1500, T_1=1000 y T_2=500), realizan una prueba de progenie (una sola generación). El mercado escogerá los 10 mejores sementales tras la prueba (N=10). La heredabilidad es 0,25. Ambas empresas, independientemente de la superioridad genética de los sementales seleccionados, buscan que sus sementales queden escogidos por delante de los de la competencia.

Ambas empresas conocen todas las reglas del juego excepto el tamaño de familia que emplearán (tendrán que decidirlo) y el tamaño de familia de la competencia (tendrán que adivinarlo). En este juego, el tamaño de familia que cada empresa utiliza se denomina su "estrategia".

Llamaremos n_1 y n_2 a los tamaños de familia o estrategias, S_1 y S_2 a la cantidad de sementales probados (S_i=T_i/n_i).

Cómo jugar

Primero, es un juego de suma cero. Es decir, lo que gana una empresa lo pierde la otra y viceversa. En estos juegos no hay ninguna razón para cooperar. La mejor manera de plantear el juego es, pues, competir.

En el juego propuesto, es de esperar que dos terceras partes de los sementales seleccionados hayan sido probados por la empresa número 1 y una tercera parte hayan sido seleccionados por la empresa número 2. Definiremos los pagos del juego como el número de sementales que consigue colocar en el mercado una empresa por encima o por debajo de su número esperado. O sea:

$$P_i = N_i - \frac{NT_i}{T}$$

Definimos también la matriz de pagos como una tabla que representa los pagos

para ambas empresas en cualquier combinación de estrategias. Esta matriz de pagos puede ser obtenida por todos los jugadores antes de determinar su estrategia. Esta matriz se presenta en el cuadro 1.

Nótese que para obtener los pagos, es necesario en cada caso buscar el punto de truncamiento adecuado que deje 10 sementales en el lado derecho. Determinar la posición de este punto de truncamiento puede hacerse por tanteo usando un método numérico (BURDEN y FAIRES, 1985).

El punto de truncamiento ha de cortar las distribuciones de los índices de selección obtenidos por los sementales de ambas empresas. Estos sementales son en cada caso una muestra de S_i individuos con media nula y varianza igual a

$$\sigma^2_{\hat{a}} = \frac{0.25 n_i h^2}{1 + 0.25(n_i - 1)h^2}$$

El juego consiste en que, atendiendo a el cuadro 1, cada empresa debe adivinar cuál será la estrategia que la empresa contraria elegirá, y decidir entonces la estrategia propia que maximice sus pagos.

Resultado del juego del duopolio

Aunque cada empresa tiene libertad para elegir su estrategia, un análisis razonable del juego lleva a una elección unívoca de las estrategias óptimas de ambas empresas. La empresa 1 elegirá como estrategia un tamaño de familia de 8. Si nos fijamos en la tabla 1, la columna que da mejores pagos

CUADRO 1
MATRIZ DE PAGOS PARA EL JUEGO DEL DUOPOLIO. ESTA MATRIZ REPRESENTA LOS PAGOS SOLAMENTE PARA LA EMPRESA 1, YA QUE LOS PAGOS PARA LA EMPRESA 2 SON IGUALES PERO DE SIGNO CONTRARIO
TABLE 1
PAYOFF MATRIX FOR THE TWO COMPANIES GAME. PAYOFFS REPRESENT THE PAYOFF FOR COMPANY 1 IN SEVERAL CASES OF SIMULTANEOUS PURE STRATEGIES. PAYOFFS FOR THE COMPANY 2 ARE EQUIVALENT BUT IN THE OPPOSITE SIGN

		Estrategia de la empresa 1									
		2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Estrategia de la empresa 2	2	0	1.591	1.942	1.980	1.884	1.713	1.494	1.246	.981	.708
	4	-1.745	0	.494	.609	.563	.434	.260	.061	-.150	-.365
	6	-2.087	-.487	0	.132	.110	.007	-.139	-.308	-.491	-.678
	8	-2.014	-.578	-.128	0	-.016	-.106	-.237	-.391	-.557	-.729
	10	-1.796	-.509	-.101	.015	0	-.084	-.206	-.351	-.507	-.669
	12	-1.529	-.375	-.006	.097	.080	0	-.117	-.254	-.403	-.558
	14	-1.255	-.215	.118	.209	.190	.112	0	-.132	-.275	-.424
	16	-.990	-.049	.253	.333	.312	.235	.127	0	-.138	-.282
	18	-.743	.114	.388	.459	.436	.361	.256	.133	0	-.139
	20	-.515	.270	.520	.582	.557	.484	.382	.264	.135	0

es la columna 8. Así, la empresa 1 no tendrá dudas en elegir esta estrategia. La empresa 2, a su vez, sabe que la empresa 1 elegirá 8, luego el mejor pago para ella está en la celda (8,8), ya que cualquier otro valor de esta columna da pagos positivos para la empresa 1 y negativos para ella. El resultado del juego si ambas empresas quieren competir es (8,8) y los pagos son cero para ambas empresas, es decir, cada empresa consigue colocar en el mercado una proporción de sementales que corresponde a la proporción de sus recursos de testaje.

Podemos representar el cuadro 1 en forma de gráfica (figura 1). Esta figura tiene forma de silla de montar, y el equilibrio comercial (8,8) corresponde a maximizar esa superficie en una dirección pero minimizarla en la dirección perpendicular.

Vamos a ver el resultado del juego un poco más en detalle. Ambas empresas pueden calcular, usando métodos numéricos, que con 1500 plazas y 10 sementales, el tamaño de familia que maximiza el progreso genético es 14. Entonces, ambas empresas pueden escribir el cuadro 2, que se presenta a continuación:

Razonemos como la empresa 1: si la empresa 2 escoge 14, ya que quiere maximizar el progreso genético, mi estrategia puede ser 8 ó 14. Si escojo 8, conseguiré colocar entre los seleccionados 6,8 sementales y si escojo 14, sólo colocaré 6,6. Por tanto, si la empresa 2 escoge 14, a mi me interesa escoger 8. Por otro lado, si la empresa 2 escoge 8, ya que quiere maximizar sus resultados comerciales, mi estrategia puede ser 8 ó 14. Si escojo 8, conseguiré colocar entre los seleccionados 6,6 se-

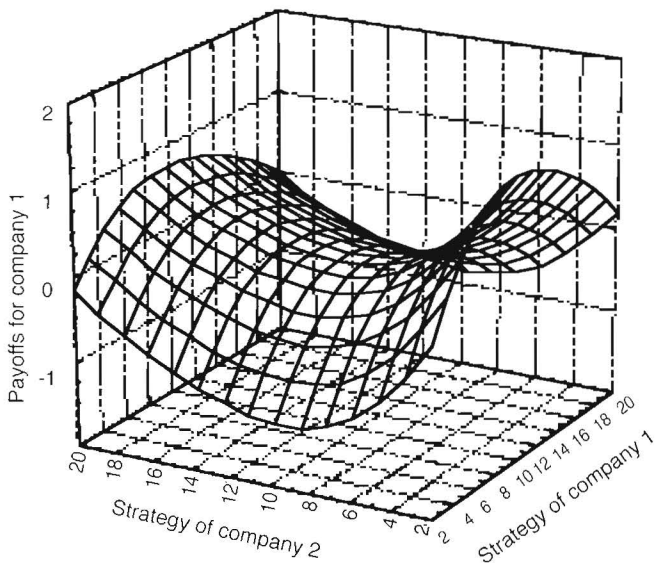


Figura 1. Pagos para la empresa 1 en el juego del duopolio
Figure 1. Payoffs for the company 1 in the two companies game

CUADRO 2
ESTRATEGIAS SIMULTÁNEAS DE AMBAS EMPRESAS, SUS PAGOS Y EL PROGRESO GENÉTICO OBTENIDO DE ESAS COMBINACIONES
TABLE 2
SIMULTANEOUS STRATEGIES OF BOTH COMPANIES, THEIR PAYOFFS AND THE TOTAL GENETIC PROGRESS OF THE POPULATION

n_1	n_2	N_1	N_2	P_1	P_2	$E(\Delta G)$
8	14	6,876	3,124	0,209	-0,209	1,215
14	8	6,430	3,570	-0,237	0,237	1,229
8	8	6,667	3,333	0	0	1,201
14	14	6,667	3,333	0	0	1,242

mentales y si escojo 14, sólo colocaré 6,4. Por tanto, si la empresa 2 escoge 8, a mi me interesa escoger 8. Por tanto, haga lo que haga la empresa 2, a mí me interesa escoger 8.

Al razonar como la empresa 2, el argumento se repite de igual forma. Por tanto, aunque ambas empresas obtienen los mismos pagos en (8,8) que en (14,14), dos empresas egoístas forzarán al competir una situación tal como (8,8), reduciendo el progreso genético un 3% sin que ninguna de ellas saque beneficio de la competencia. En cualquier caso, una determinada empresa puede jugar 8 esperando que la contraria, bien por altruismo o bien por desconocimiento de la teoría de juegos, juegue 14.

Para la teoría de juegos, este tipo de equilibrios estables se denominan equilibrios de Nash (NASH, 1950). En el caso de juegos en los que las estrategias deban ser elegidas dentro de un rango de valores numéricos, el equilibrio de Nash se denomina más específicamente equilibrio de Cournot-Nash (BINMORE, 1992).

Un resultado inesperado de este juego es que el tamaño de la empresa no influye en su decisión, y empresas grandes no tienen motivos para comportarse de forma distinta a las empresas pequeñas, ni pueden forzar jugadas ganadoras.

Más de dos empresas

En el juego anterior, ambas empresas jugaban tras haber calculado todas las posibles combinaciones de estrategias y atendiendo a la superficie de la figura 1. Cuando hay más de dos empresas, el cuadro de pagos es multidimensional y el número de combinaciones crece de forma galopante. Por este motivo, cuando hay varias empresas, éstas tendrán que emplear otros procedimientos para determinar el equilibrio de Nash y jugar de forma óptima.

Planteamos aquí un procedimiento para encontrar ese equilibrio teniendo en cuenta que la superficie multidimensional ha de ser optimizada para cada empresa en su eje de coordenadas. Pueden utilizarse procedimientos similares a los de maximización de funciones como los presentados en Press (1986), pero teniendo en cuenta que la fun-

ción de pagos es particular para cada empresa.

Presentaremos el algoritmo sobre un ejemplo, supongamos el mismo caso del juego anterior, pero ahora juegan 5 empresas cuyos recursos de testaje son 700 plazas, 400 plazas, 200 plazas, 100 plazas y 100 plazas respectivamente.

El algoritmo que hemos empleado es el siguiente (ver cuadro 3): todas las empresas comienzan jugando 5. La empresa 1 se comporta de forma egoísta y calcula que jugando 8,29 obtendrá el máximo beneficio. La empresa 2, que desconfía de la empresa 1, sabe que va jugar 8,29 y calcula que debe jugar 8,46 para maximizar sus beneficios, y así sucesivamente. Cuando todas las empresas se hayan comportado de forma egoísta, las estrategias serán 8,29, 8,46, 8,55, 8,59 y 8,64. La empresa 1 todavía puede ir más lejos y utilizar esa información para optimizar de nuevo su estrategia y obtener 8,64, pero su decisión puede ser anticipada por las demás. Cuando todas las empresas hayan repetido esta operación varias veces, ninguna de ellas podrá mejorar sus pagos con un cambio unilateral de

CUADRO 3
RESULTADOS DE LA CONVERGENCIA DEL ALGORITMO PARA ENCONTRAR EL EQUILIBRIO DE NASH EN VARIOS CASOS CON DIFERENTE NÚMERO DE EMPRESAS. LA HEREDABILIDAD FUE 0.25 Y EL NÚMERO DE SEMENTALES SELECCIONADOS FUE 10

TABLE 3
RESULTS AND CONVERGENCE OF THE ALGORITHM REACHING THE NASH EQUILIBRIUM IN SEVERAL CASES WITH NUMBER OF COMPANIES AND SEVERAL TESTING FACILITY STRUCTURES. HERITABILITY WAS 0.25 AND THE NUMBER OF SIRES SELECTED BY TRUNCATION WAS 10

case	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	iter	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
1	700	400	200	100	100	1	8,299	8,461	8,551	8,598	8,647
						2	8,649	8,649	8,649	8,649	8,649
						3	8,649	8,649	8,649	8,649	8,649
2	600	300	300	150	150	1	8,261	8,377	8,505	8,574	8,649
						2	8,649	8,649	8,649	8,649	8,649
						3	8,649	8,649	8,649	8,649	8,649
3	850	350	250	50		1	8,357	8,506	8,623	8,648	
						2	8,649	8,649	8,649	8,649	
						3	8,649	8,649	8,649	8,649	
4	900	500	100			1	8,378	8,599	8,648		
						2	8,649	8,649	8,649		
						3	8,649	8,649	8,649		
5	900	600				1	8,378	8,648			
						2	8,649	8,649			
						3	8,649	8,649			

su estrategia, entonces esta combinación de estrategias corresponde al equilibrio de Nash. En el cuadro 3 se presenta el resultado de este algoritmo para varios casos con diferente número de empresas.

En cada paso del algoritmo, la empresa correspondiente debe optimizar su estrategia asumiendo que las otras empresas no cambian la suya. Buscar el máximo de esa función puede hacerse con un método numérico como el algoritmo de acotamientos sucesivos (PRESS *et al.*, 1986).

El cuadro 3 presenta también otros 4 casos con diferente número y tamaño de empresas. En los 5 casos, los recursos de testaje totales fueron 1500, y el equilibrio de Nash fue igual para todos los casos. Esto parece sugerir que el punto de equilibrio depende sólo del cociente entre los recursos de testaje y el número de sementales a seleccionar (T/N), y del coeficiente de heredabilidad, conclusión ésta que recuerda el trabajo de ROBERTSON (1957) acerca del tamaño de familia que optimiza el progreso genético.

Papel del cociente T/N y de la heredabilidad en el equilibrio comercial: En las figuras 2 y 3 presentamos los efectos del cociente T/N y de la heredabilidad en el tamaño de familia escogido por empresas altruistas o egoístas y en el progreso genético obtenido. Se muestra también la aproximación de Robertson para el tamaño de familia óptimo.

$$n = 0.56\sqrt{\frac{T}{Nh^2}}$$

Estas figuras muestran que el equilibrio comercial siempre da un tamaño de familia menor que el que maximiza el progreso genético, especialmente cuando la heredabilidad es baja. El progreso genético obtenido por las 5 empresas egoístas es alrededor de un 3% menor que el obtenido por 5 empresas altruistas.

Bibliografía

BINMORE K., 1992. Fund and games: A text on game theory. D.C. Heath. Lexington. Mass.

BURDEN RL. and FAIRES JD., 1985. Numerical analysis. PWS. Boston, US.

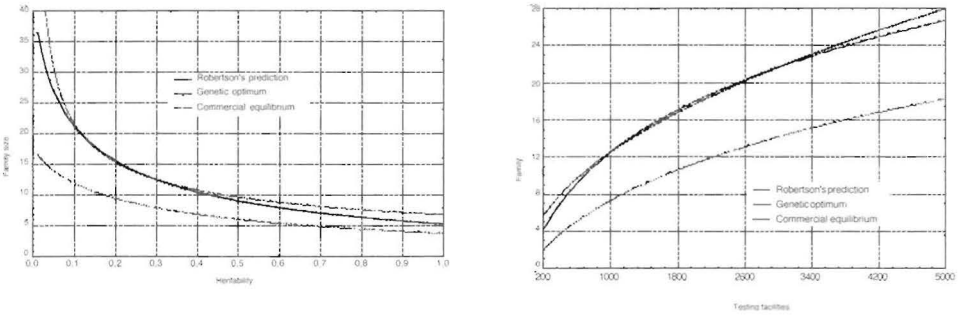


Figura 2. Óptimo genético, equilibrio comercial y predicción de Robertson en función de la heredabilidad y el cociente T/N

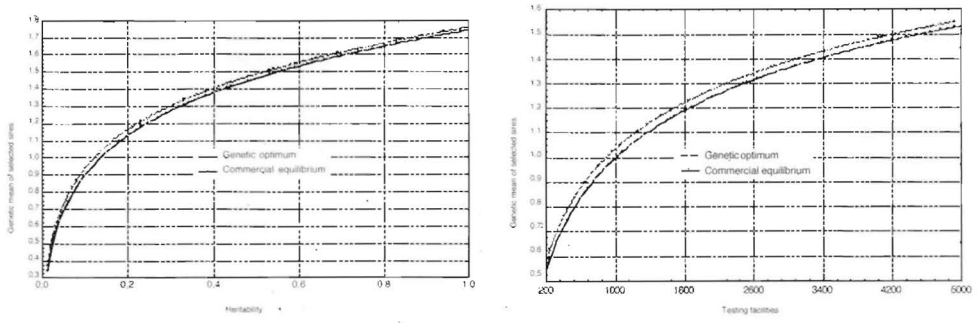


Figura 3. Progreso genético obtenido cuando las empresas respetan el óptimo genético o el equilibrio comercial

HILL WG., 1971. Investment appraisal for national breeding programs. Anim. Prod. 71, 37-50.

NASH J., 1951. Non-cooperative games. Ann. Math. 54, 286-295.

PRESS WH., FLANNERY BP., TEUKOLSKI SA. and VETTERLING WT., 1986. Numerical recipes: The art of scientific computing. Cambridge Univ. Press. Cambridge, UK .

RASMUSEN E., 1994. Games and information. An introduction to game theory. Blackwell, Oxford, UK.

ROBERTSON A., 1957. Optimum group size in progeny testing and family selection. Biometrics. 13, 442-450.

VON NEUMANN J. and MORGESTERN O., 1944. The theory of games in economic behavior. Wiley. New York.