ITEA (1999), Vol. Extra 20 N.° 1

LOS NUEVOS ALGORITMOS DE PUNTO INTERIOR EN EL CONTEXTO AGRARIO

José Luis Alejandre Marco, Ana Allueva Pinilla, José Miguel González Sántos
Dpto. Matemática Aplicada. Universidad de Zaragoza.

INTRODUCCIÓN

El objetivo prioritario en cualquier explotación agropecuaria es conseguir el más alto grado de rentabilidad, utilizando eficientemente medios y recursos entre los que hoy ya no se puede prescindir de los conocimientos científicos y técnicos, destacándose el uso de las disciplinas ligadas a la Optimización y las herramientas informáticas.

La Programación Lineal es una de las técnicas que ha adquirido mayores posibilidades de aplicación y a la que se podría destacar de entre los instrumentos disponibles en el entorno de la gestión empresarial. Una de las causas que ha motivado un mayor interés en el sector agrario se debe a su posibilidad de incluir un gran número de actividades y restricciones en sus aplicaciones, permitiendo recoger en el modelo la mayor parte de factores/medios que intervienen y las interrelaciones existentes entre ellos.

En la actualidad, el desarrollo del *hardware* a precios asequibles está siendo vertiginoso por lo que, en el sector agrario, se debería adaptar el uso del *software* con los nuevos códigos y algoritmos matemáticos que se han desarrollado y en los que se continúa investigando en la actualidad.

Hasta el momento, los paquetes comerciales que resuelven problemas de Programación Lineal utilizados en este sector implementan el método del Simplex de George Dantzig, de hace ya medio siglo. Este algoritmo se basa en analizar, en un proceso iterativo, los sucesivos vértices del poliedro que conforma la región de factibilidad para el conjunto de restricciones. En cada uno de ellos se evalúa la función objetivo, de modo que siguiendo una dirección de mejora para esta función, y partiendo de un vértice inicial, se llega hasta el punto extremo o vértice donde se localiza la solución óptima.

Aunque, la eficiencia práctica del método del Simplex fue apreciada desde el momento que se desarrolló, no es fácil la teoría que subsiste, debido a que no se garantiza que el método se ejecute bien en cada programa lineal. Un famoso ejemplo dado por Klee y Minty requiere 2^n iteraciones del Simplex para resolver un problema lineal en $I\!R^n$. Es decir, el algoritmo tiene un coste, computacionalmente hablando, exponencial.

Hoy en día las nuevas técnicas de Punto Interior para Programación Lineal permiten resolver estos problemas en tiempo polinomial. Los algoritmos polinomiales tienen un tiempo de ejecución que, en el peor de los casos, es una función polinomial de la cantidad de almacenamiento necesario para los datos del problema.

Su origen se sitúa en el algoritmo de Karmarkar (1984); éste es un algoritmo polinomial que identifica un punto factible primal x tal que la función objetivo $c^T x$ esté tan cerca de su valor optimal como queramos. A diferencia del

método del Simplex, el algoritmo de Karmarkar avanza hacia la solución óptima, partiendo de un punto inicial, por el interior de la región de factibilidad y el progreso hacia la optimalidad se mide por una función potencial logaritmica.

El trabajo de Karmarkar (cuya importancia fue reconocida más tarde), dio origen a los *Métodos de Punto Interior* y en los años siguientes, excelentes investigadores en Matemática Aplicada, Investigación Operativa y Computación, han efectuado rápidos desarrollos y expansiones de este nuevo campo.

La mayoría de la atención teórica se enfoca sobre los *métodos primal-dual*, que resultan una de las clases más importantes dentro de los métodos de punto interior. La experiencia computacional demuestra que los algoritmos primal-dual también se ejecutan mejor que otros métodos de punto interior sobre problemas prácticos. Desde el punto de vista computacional, la mayor parte del software implementado desde 1990 está basado en un algoritmo primal-dual: el algoritmo *predictor-corrector* de Mehrotra.

El objeto de este trabajo no es, obviamente, el análisis de los aspectos matemáticos de los nuevos métodos de Punto Interior, sino, más bien, contribuir a que éstos se conozcan y apliquen con todo su potencial en la resolución de modelos matemáticos en el contexto agrario. Debido a la amplitud del tema y, teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, nos limitaremos únicamente a presentar su estudio ya que, desde el punto de vista práctico de la formulación del problema y la interpretación y análisis de los resultados, el procedimiento es similar al utilizado hasta ahora en la resolución de cualquier problema de Programación Lineal utilizando el Método del Simplex.

MATERIAL Y MÉTODOS

El problema general de Programación Lineal (P.L.) en forma estándar y denominado *problema primal* se puede formular de la siguiente manera:

$$(P)\begin{vmatrix} \min\ c^T x \\ \text{s.a}: Ax = b \\ x \geq 0 \end{vmatrix}$$

donde:
c, x son vectores en IR^n,
b es un vector en IR^m
A es una matriz mxn

Es sobradamente conocido que cualquier problema de P.L. se puede llevar hasta su forma estándar sin más que introducir variables de holgura o artificiales en la formulación de las restricciones que no sean de igualdad, y partir las variables no acotadas explícitamente en partes positiva y negativa.

Asociado con cualquier programa lineal en forma estándar, existe otro programa lineal llamado *problema dual*, que se formula con los mismos datos que su primal agrupados en diferente forma, esto es:

$$(D)\begin{vmatrix} \max\ b^T \lambda \\ \text{s.a}: A^T \lambda + s = c \\ s \geq 0 \end{vmatrix}$$

donde:
λ, es un vector en IR^m,
s es un vector en IR^n

Las componentes de λ se llaman variables duales, mientras que s es el vector de variables duales de holgura. La inclusión explícita del vector s es fundamental para el análisis e implementación de los métodos de punto interior.

Los problemas (*P*) y (*D*) conjuntamente se denominan *pareja primal-dual*. Se ha desarrollado una extensa teoría de dualidad que relaciona estos dos problemas; en particular, se demuestra que las dos funciones objetivo coinciden en las soluciones, de modo que $b^T\lambda^* = c^T x^*$, siempre que x^* resuelva (*P*) y (λ^*, x^*) resuelva (*D*).

Los métodos primal-dual de punto interior encuentran soluciones primal-dual (x^*, λ^*, s^*) para la pareja de problemas (*P*)-(*D*) generando iteraciones (x^k, λ^k, s^k) que satisfacen $x^k > 0$, $s^k > 0$, propiedad que da origen a la denominación de métodos de punto interior. La mayoría de estos métodos requieren que las iteraciones sean estrictamente factibles, esto es, cada solución (x^k, λ^k, s^k) debe satisfacer las restricciones de igualdad lineales para los problemas primal y dual.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A diferencia del algoritmo del Simplex, los algoritmos primal-dual nunca encuentran una solución exacta del problema lineal. Para resolver este problema puede usarse una fase de terminación finita que salte de una solución aproximada a una solución exacta, o una fase que identifique una solución vértice. En la mayoría de los códigos existentes para los algoritmos primal-dual, se utiliza simplemente un criterio de terminación cuando la iteración en que nos encontramos está suficientemente cerca del conjunto solución.

A este hecho, que en principio podría parecer un inconveniente, y actualmente está ya ampliamente superado, se le contrapone la gran ventaja que supone la rapidez de ejecución de los métodos polinomiales; en particular en el área de la gestión o incluso la política agraria, donde es frecuente manejar problemas con modelización lineal que incluyen un gran número de variables y restricciones (entiéndase miles de variables o restricciones). El tamaño del modelo no debería ser pues un problema en la actualidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Maroto, C., Ciria, J., Gallego, L., Torres, A. (1997) *Gestión de la Producción Ganadera. Modelos, Técnicas y Aplicaciones Informáticas.* Ediciones Mundi-Prensa.- Caja Rural.
[2] Wright, S.J. (1997) *Interior Point Algorithm: Theory and Analysis.* John Wiley & Sons.